

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ
Кафедра математики та моделювання



Затверджую:

Декан факультету
машинобудування

Кассов В. Д.

« 05 » 05 2021 р

Гарант освітньої програми:

Кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Ровенська О.Г.

« 05 » 05 2021 р

Розглянуто і схвалено на
засіданні кафедри математики та
моделювання

Протокол № 4 від 5 травня 2021 р

В.о. зав. кафедри

Астахов В.М.

РОБОЧА ПРОГРАМА

«Функціональний аналіз»

галузь знань 01 Освіта/Педагогіка

спеціальність 014 Середня освіта (Математика)

ОПП (магістр) Математика

кваліфікація

Магістр середньої освіти (математика).

Учитель математики та економіки.

Викладач математики.

Розробник: О.Г. Ровенська, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Розроблено за підтримки громадської організації «Smart Maths»

<http://formathematics.com/>

2021 – 2022 навчальний рік

1 РОЗПОДІЛ ГОДИН

Форма навчання	Кредитів ECTS	Годин	Аудиторних годин				Самост. робота	Розподіл за семестрами			
			Лекції	Практичні	Лабораторні	Всього		Екзамени	Заліки	ДЗ	Курсова робота
2 сем	4,5	135	18/4	36/4	–	54/8	81/127	+			
Всього	4,5	135	18/4	36/4	–	54/8	81/127	+			

2 МЕТА ТА ЗАВДАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Мета вивчення дисципліни – формування когнітивних, афективних та психомоторних компетентностей в сфері навчання студентів функціональним методам, що є необхідними у дослідженні функціональних моделей, які формуються під час використання методів і засобів математичного аналізу для вирішення складних проблем незалежно від сфери діяльності, а також набуття навичок застосування цих компетентностей у професійній діяльності.

Курс суттєво розширює знання студентів про методи вивчення нескінченновимірних об'єктів саме завдяки опануванню аналітичного методу, що полягає у послідовному застосуванні алгебри до вивчення різних геометричних образів. З іншого боку, цей курс вводить студентів у світ сучасної математики, знайомлячи їх з основами теорії нескінченновимірних просторів, лінійних операторів, функціоналів, які дістануть подальшого розвитку і продовження в теорії диференціальних рівнянь та інших загальних та спеціальних курсах. Важливим є також ознайомлення з основними методами розв'язання функціональних рівнянь. У подальшому ці структури та їх перетворення знаходять численні застосування в економіці, теорії управління, кібернетиці, фінансовій математиці, екологічному та соціальному моделюванні тощо.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент має опанувати **загальними компетентностями**:

- аналіз і синтез: здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- практична робота: розуміння предметної області та професійної діяльності, здатність застосовувати професійні знання у практичних ситуаціях, аналізувати, досліджувати та презентувати свій досвід;
- творчість та інновації: здатність створювати та передавати нові ідеї, генерувати інноваційні рішення відомих проблем або дослідницьких ситуацій;
- інформаційні технології: засвоєння нових знань, оволодіння сучасними інформаційними технологіями;
- розвиток та самовдосконалення: здатність проводити самооцінку та аналіз власних досягнень, здатність до самоосвіти та вдосконалення професійних навичок;

фаховими компетентностями:

- фундаментальні знання та розуміння: здатність використовувати системні знання з фундаментальної математики, економіки та методик їх навчання, фундаментальні знання змісту шкільного курсу математики сучасної школи;
- професійні навички: здатність застосовувати сучасні методи й освітні технології навчання, аналізувати особливості сприйняття та засвоєння учнями і студентами навчальної інформації з метою прогнозу ефективності та корекції освітнього процесу;
- вирішення проблем: здатність застосовувати сучасні математико-статистичні методи та пакети комп'ютерної математики до створення і аналізу математичних моделей реальних задач і процесів;

-інформаційні освітні технології: здатність до використання сучасних методів навчання, пов'язаних із використанням ІКТ і STEM технологій: мультимедійне навчання; комп'ютерне програмоване навчання; інтерактивне навчання; дистанційне навчання; використання Інтернет-технологій;

-професійна комунікація: здатність спілкуватися державною та іноземною мовами у відповідності до професійної ситуації;

-академічна доброчесність: усвідомлення етичних та юридичних проблем використання інформаційних ресурсів, знання основ мережевого етикету;

-альтернативна освіта: здатність здійснювати аналіз та корекцію знань та умінь учнів в умовах диференційованого навчання, здатність ефективно планувати та організовувати різні форми неформальної освіти.

Завданнями вивчення дисципліни полягає у формуванні здатностей студентів до:

-математичного та логічного мислення, побудови і дослідження функціональних моделей; обґрунтованого вибору методів функціонального аналізу для розв'язування теоретичних і прикладних задач, що виникають під час використання методів і засобів математичного аналізу; інтерпретування отриманих результатів в різних предметних галузях (інформаційного, економічного призначення, тощо);

-формалізованого опису теоретичних і прикладних задач що виникають під час використання методів і засобів математичного аналізу; доведення розв'язків завдань до практично прийнятних результатів (інтерпретація й оцінка якісних показників отриманого розв'язку);

-розв'язання екстремальних задач, отримання геометричних та фізичних характеристик процесів і явищ навколишнього середовища;

-залучення методів функціонального аналізу для підтвердження результатів, що отримані під час експерименту в наукових дослідженнях;

-формування навичок професійної комунікації й аргументованого диспутування з питань використання методів функціонального аналізу під час використання методів і засобів математичного аналізу для вирішення складних проблем незалежно від сфери діяльності в колі фахівців та нефаківців.

Попередніми умовами успішного вивчення курсу «Функціональний аналіз» є вивчення загальних та спеціальних дисциплін спеціальності, насамперед, володіння основами математичного аналізу, алгебри, теорії диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей, математичної статистики, логіки.

Підвищенню ефективності вивчення курсу сприяє використання всесвітньої мережі Інтернет, різноманітних програмних засобів навчального призначення, бібліотек електронних наочностей, офісних і спеціалізованих пакетів (наприклад, MsOffice, Ms PowerPoint, MathCAD, MAPLE та інших).

3 РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

3.1 Тематика лекцій та практичних занять

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ

Тема 1.1 Поняття метричного простору

Означення і приклади метричних просторів.

Відкриті та замкнені множини.

Компактні множини метричних просторів.

Принцип стискаючих відображень. Застосування.

Література: [2] с.15-29. [3] с. 23-33. [4] с. 47-53, [8] с. 3-9

Тема 1.2 Нормовані лінійні простори

Означення, приклади.

Евклідові простори.

Теорема Ріса-Фішера

Література: [2] с.68-77, 83-86. [3] с. 63-80. [4.] с. 138-144. [10] с. 19-44. [8] с. 36-43

Тема 1.3. Гільбертові простори

Ряди Фур'є в гільбертовому просторі.

Нерівність Бесселя.

Повні ортогональні системи.

Література: [2] с.86-91. [3] с. 80-83. [4] с. 145-165. [10] с. 45-47, 57-68. [8] с. 43-47

Тема 1.4. Простори сумовних функцій

Означення і основні властивості

Збіжність в середньому

Повнота простору L_1

Добуток мір

Література: : [10] с. 372 – 373, [12] с. 351 – 355, [11] с. 129 – 142.

Тема 1.5. Ортогональні системи в L_2

Тригонометрична система

Многочлени Лежандра

Інші ортогональні та ортонормовані системи системи

Кратні ряди Фур'є

Література: : [10] с. 432 – 442, [12] с. 364 – 379, [11] с. 163 – 172.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ЛІНІЙНІ ФУНКЦІОНАЛИ І ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

Тема 2.1. Лінійні функціонали

Означення лінійних функціоналів. Норма функціоналу.

Спряжений простір.

Продовження лінійних функціоналів.

Слабка збіжність.

Загальний вигляд лінійного функціоналу в гільбертовому просторі.

Література: [2] с.86-91. [3] с. 80-83. [4] с. 145-165. [10] с. 45-47, 57-68. [8] с. 43-47

Тема 2.2 Поняття лінійного оператора

Означення лінійних операторів.

Обмежені оператори.

Норма оператора.

Простір лінійних обмежених операторів.

Література: [2] с.103-111. [3] с. 160-178. [4] с. 206-222. [10] с. 75-81.

Тема 2.3. Обернений оператор.

Означення, приклади.

Резольвента. Спектр.

Теорема Гільберта-Шмідта.

Література: [2] с.103-108. [3] с. 160-170. [4] с. 206-232.

Тема 2.4 Теорема Банаха про зворотній оператор.

Продовження оператора за неперервністю.

Теорема Хана-Банаха в нормованому просторі і її геометричний зміст.

Наслідки з теореми Хана-Банаха.

Література: [2] с.110, 111. [3] с. 168-170. [4] с. 206-224.

Тема 2.5. Спектральний аналіз

Самоспряжені оператори

Спектр самоспряженого оператора

Література: [2] с.108-111. [3] с. 170-178. [4] с. 233-235.

3.2 Результати навчання і їх розподіл за модулями

Формулювання спеціальних результатів із їх розподілом за модулями представлені нижче:

Модулі	Зміст програмного результату навчання
ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ	Здобувач вищої освіти здатен до: -знання та розуміння основних понять загальної теорії функцій; -знання методів, що відносяться до базових областей загальної теорії функцій, в обсязі достатньому для успішної роботи у наукових групах; -спеціалізованих концептуальних знань з теорії метричних просторів, які є основою для оригінального мислення та інноваційної діяльності, зокрема в контексті дослідницької роботи; -побудові функціональних моделей, алгоритмізування розв'язування математичної задачі; -організації пошуку відповідних наукових джерел, які мають безпосереднє відношення до фундаментальної математики, в тому числі з використанням іноземної мови; -уявлення про сучасний математичний апарат функціональних методів, який застосовують в природничих науках, інженерних та економічних дослідженнях; -усвідомлення необхідності подальшого навчання, систематичного підвищення професійної кваліфікації, пов'язаної із застосуванням методів загальної теорії.
ЛІНІЙНІ ФУНКЦІОНАЛ И І ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ	Здобувач вищої освіти здатний -знання та розуміння понять лінійного функціоналу та лінійного оператора; -знання методів, що відносяться до базових областей функціонального аналізу, в обсязі достатньому для успішної роботи у наукових групах; -спеціалізованих концептуальних знань з теорії лінійних функціоналів і лінійних операторів, які є основою для оригінального мислення та інноваційної діяльності, зокрема в контексті дослідницької роботи; -побудові функціональних моделей, алгоритмізування розв'язування математичної задачі;

Модулі	Зміст програмного результату навчання
	-організації пошуку відповідних наукових джерел, які мають безпосереднє відношення до фундаментальної математики, в тому числі з використанням іноземної мови; -уявлення про сучасний математичний апарат лінійних функціональних методів, який застосовують в природничих науках, інженерних та економічних дослідженнях; -усвідомлення необхідності подальшого навчання, систематичного підвищення професійної кваліфікації, пов'язаної із застосуванням методів функціонального аналізу.

4 СТРУКТУРА ТА ТЕХНОЛОГІЧНА КАРТА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
4.1 Технологічна карта навчальної дисципліни

Види занять		Всього	Навчальні тижні																	
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Аудиторні	Лекції	18	2		2		2		2		2		2		2		2		2	
	Практичні	36	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	Лабораторні																			
	Індивідуальні																			
	Поточ. контр.		+		+			+		+				+		+			+	
	Контр.роб.(ТО)				+						+							+		
	Модул. контр							M2												M1
	Захист курсов																			
	Захист лабор.																			
	Консультації																			
	Атестації										A1									A2
	Всього	54	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2
Самостійні	Курс. проект.																			
	Підгот. до зан	81	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5
	Розрах.-граф.																			
	Консультації																			
	Експерсії																			
	Всього	81	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5
Навчальне навантаження студентів		135	8	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	7

Підсумковий контроль – екзамен

4.2 Розподіл часу за темами і модулями

№	Назва змістових модулів і тем	Кількість годин			
		Усього	В тому числі		
			Л	П(С)	СРС
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ					
1	Тема 1.1 Поняття метричного простору Означення і приклади метричних просторів. Відкриті та замкнені множини. Компактні множини метричних просторів. Принцип стискаючих відображень. Застосування.	14	2	4	8
2	Тема 1.2 Нормовані лінійні простори Означення, приклади.	14	2	4	8

	Евклідові простори. Теорема Ріса-Фішера				
3	Тема 1.3. Гільбертові простори Ряди Фур'є в гільбертовому просторі. Нерівність Бесселя. Повні ортогональні системи.	14	2	4	8
4	Тема 1.4. Простори сумовних функцій Означення і основні властивості Збіжність в середньому Повнота простору L_1 Добуток мір	14	2	4	8
5	Тема 1.5. Ортогональні системи в L_2 Тригонометрична система Многочлени Лежандра Інші ортогональні та ортонормовані системи Кратні ряди Фур'є	11	1	2	8
6	Разом М1	67	9	18	40
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ЛІНІЙНІ ФУНКЦІОНАЛИ І ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ					
7	Тема 2.1. Лінійні функціонали Означення. Норма функціоналу. Спряжений простір. Продовження лінійних функціоналів. Слабка збіжність. Загальний вигляд лінійного функціоналу в гільбертовому просторі.	14	2	4	8
8	Тема 2.2 Поняття лінійного оператора Означення лінійних операторів. Обмежені оператори. Норма оператора. Простір лінійних обмежених операторів.	14	2	4	8
9	Тема 2.3. Обернений оператор. Означення, приклади. Резольвента. Спектр. Теорема Гільберта-Шмідта.	14	2	4	8
10	Тема 2.4 Теорема Банаха про зворотній оператор. Продовження оператора за неперервністю. Теорема Хана-Банаха в нормованому просторі і її геометричний зміст. Наслідки з теореми Хана-Банаха.	14	2	4	8
11	Тема 2.5. Спектральний аналіз Самоспряжені оператори Спектр самоспряженого оператора	12	1	2	9
12	Разом М2	68	9	18	41
13	Разом за курс	135	18	36	81

Л – лекції, П (С) – практичні (семінарські) заняття, СРС – самостійна робота студентів.

5 САМОСТІЙНА РОБОТА

Уміння студентів самостійно працювати над вивченням конкретного предмета – важливий чинник підвищення якості підготовки спеціалістів.

Самостійна робота студента (денна форма навчання) включає підготовку до практичних занять; самостійне опрацювання додаткової літератури та питань для самоконтролю засвоєння змісту навчального матеріалу, а також підготовку рефератів, есе, доповідей та самостійних домашніх (творчих) завдань за тематикою, що наведено у методичних вказівках до самостійної роботи – Режим доступу : <http://www.dgma.donetsk.ua/metodichne-zabezpechennya-osvitno-profesiyna-programa-serednya-osvita-matematika.html>

Враховуючи це, рекомендуються наступні **форми організації самостійної роботи студентів**:

- підготовка до практичних занять;
- самостійне опрацювання додаткової літератури до тем лекційного курсу і практичних (семінарських) занять, а також літератури для підготовки самостійного домашнього завдання;
- підготовка доповідей, рефератів та есе за тематикою лекцій і семінарів;
- самостійне опрацювання питань для самоконтролю засвоєння змісту лекційного матеріалу з курсу.

5.1 Перелік тем для самостійного вивчення

№ з/п	Підготовка до практичних занять та виконання самостійного домашнього завдання за теми	Кількість годин
1	Поняття метричного простору	9
2	Нормовані лінійні простори	9
3	Гільбертові простори	9
4	Простори сумовних функцій	9
5	Ортогональні системи	9
6	Лінійні функціонали	9
7	Лінійні оператори	9
8	Обернений оператор	9
9	Спектральна теорія	9
Разом за курс		81

5.2 Розрахунок часу для самостійної роботи студента за видами

№ з/п	Вид роботи	Кількість годин
1	Опрацювання програмного матеріалу, що викладається на лекціях	30
2	Підготовка до практичних занять	18
3	Виконання індивідуальних завдань (рефератів, творчих, розрахунково-графічних робіт, презентацій тощо)	15
4	Підготовка до контрольних заходів (модульна контрольна робота)	10
5	Підготовка самостійного домашнього завдання	8
Разом		81

Самостійна робота виконується у відповідності до методичних вказівок до самостійної роботи студента.

6 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Метою індивідуального завдання є ґрунтовне усвідомлення суттєвих властивостей основних понять курсу, закріплення основних теорем та формування практичних вмінь студентів.

Виконання індивідуального завдання передбачає розв'язання студентами задач з методичних посібників за наступними темами:

- 1 Поняття метричного простору
- 2 Нормовані лінійні простори
- 3 Гільбертові простори
- 4 Простори сумовних функцій
- 5 Ортогональні системи
- 6 Лінійні функціонали
- 7 Лінійні оператори

7 МЕТОДИ НАВЧАННЯ

Під час викладання курсу використовуються наступні методи навчання:

- розповідь – для оповідної, описової форми розкриття навчального матеріалу;
- пояснення – для розкриття сутності певного явища, закону, процесу;
- бесіда – для усвідомлення за допомогою діалогу нових явищ, понять;
- ілюстрація – для розкриття предметів і процесів через їх символічне зображення (малюнки, схеми, графіки);
- практична робота – для використання набутих знань у розв'язанні практичних завдань;
- аналітичний метод – уявного або практичного розкладу цілого на частини з метою вивчення їх суттєвих ознак;
- індуктивний метод – для вивчення явищ від одиничного до загального;
- дедуктивний метод – для вивчення навчального матеріалу від загального до окремого, одиничного;
- проблемний виклад матеріалу – для створення проблемної ситуації.

8 МЕТОДИ КОНТРОЛЮ І ПИТАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗАСВОЄННЯ МАТЕРІАЛУ

Для визначення рівня засвоєння студентами навчального матеріалу використовують такі форми та методи контролю і оцінювання знань:

- оцінювання роботи студента під час практичних занять у вигляді усного опитування або виконання розрахункових завдань;
- написання підсумкових модульних контрольних та тестових робіт;
- оцінювання виконаного самостійного домашнього завдання та його захисту;
- складання екзамену.

Оцінку знань студентів з дисципліни «Функціональний аналіз» здійснюють відповідно до положення ДДМА про організацію навчального процесу. Ця система базується на здійсненні наскрізного поточного контролю на аудиторному занятті у відповідності до його форми (лекційної, практичної).

Підсумковою оцінкою поточного контролю є оцінка за модуль, тобто реалізується принцип модульного обліку знань студентів.

Навчальним планом з дисципліни передбачено складання екзамену. Для оцінювання знань використовують стобальну шкалу оцінювання ECTS.

Порядок здійснення поточного оцінювання знань студентів.

Поточне оцінювання знань студентів здійснюється під час проведення лекційних і практичних занять і має на меті перевірку рівня підготовленості студента до виконання конкретної роботи. Об'єктами поточного контролю є:

- активність та результативність роботи студента протягом семестру над вивченням програмного матеріалу дисципліни, відвідування занять;
- виконання завдань на практичних заняттях;
- виконання завдань поточного контролю.

Робота студентів на лекціях та практичних заняттях оцінюється за 100-бальною системою. При оцінюванні виконання практичних завдань увага приділяється їх якості й самостійності.

Контроль виконання самостійного домашнього завдання передбачає виявлення опанування студентом матеріалу лекційного модуля та вміння застосувати його для вирішення практичної ситуації і проводиться у вигляді захисту самостійного домашнього завдання.

Проведення підсумкового контролю.

Екзамен здійснюється в письмовій формі за контрольними питаннями, які сформовані у екзаменаційному білеті, що дають можливість здійснити оцінювання знань студента з усієї дисципліни.

Відповіді за екзаменаційними білетами оцінюються за 100-бальною системою.

Порядок виставлення оцінки за семестр

Оцінка за семестр обчислюється як середнє арифметичне (вагові коефіцієнти однакові 0,5) з результатів поточного оцінювання і підсумкового контролю.

ПИТАННЯ ДО ЕКЗАМЕНУ

- 1 Поняття метричного простору
- 2 Нормовані лінійні простори
- 3 Гільбертові простори
- 4 Простори сумовних функцій
- 5 Ортогональні системи
- 6 Лінійні функціонали
- 7 Лінійні оператори
- 8 Обернений оператор
- 9 Теорема Хана-Банаха
- 10 Спектральна теорія

9 РОЗПОДІЛ БАЛІВ, ЯКІ ОТРИМУЮТЬ СТУДЕНТИ

Вид контрольного заходу	Бали		За семестр	До 1-й атестації
	max	max		
Контрольна робота 1	10	20	20	50
Контрольна робота 2	15	30	30	—
Контрольна робота 3	30	50	50	—
Разом за семестр	55	100	100	—
Екзамен	55	100	100	—

Разом (з урахуванням вагових коефіцієнтів)	55	100	100	–
---	----	-----	-----	---

Зразки модульних контролів та зразки розв'язань знаходяться у додатках А і Б відповідно.

За участь у науковій роботі, участь в олімпіадах і конкурсах студенту можуть призначатися додаткові бали до загального рейтингу за рішенням адміністрації факультету.

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка за національною шкалою	
	для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	для заліку
90 – 100	відмінно	зараховано
82-89	добре	
74-81		
64-73	задовільно	
60-63		
35-59	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
1-34	незадовільно з обов’язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов’язковим повторним вивченням дисципліни

10 РЕКОМЕНДОВАНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ДЖЕРЕЛА

Базові

1. Balakrishnan A.V. Applied Functional Analysis Springer-Verlag, 1981. - 373 p.
2. Abramovich Y., Avgerinos E., Yannelis N.C. (eds.) Functional Analysis and Economic Theory Springer, 1998. — 300 p.
3. Т.В. Боярищева, Т.В. Гудивок, О.О. Погоріляк. Функціональний аналіз. Навчальний посібник для студентів спеціальностей «математика», «прикладна математика», «статистика». – Ужгород, 2013. – 125 с.

Методичне забезпечення

1. Ровенська, О.Г. Функціональний аналіз: навч. посіб. для студентів спеціальності 014 «Середня освіта (Математика)» / О. Г. Ровенська. – Краматорськ : ДДМА, 2021. – 89 с.
2. Буланов, Г. С. Функціональний аналіз : навч. посіб. / Г. С. Буланов, О. Г. Ровенська, В. М. Астахов. – Краматорськ : ДДМА, 2017. – 63 с.
3. Функциональный анализ : учеб. пособ. / сост. : Г. С. Буланов, О. Г. Ровенская, В. Н. Астахов. – Краматорск : ДГМА, 2017. – 63 с.
4. Ровенська О.Г. Функціональний аналіз методичні: вказівки до семінарських занять та самостійної роботи для студентів спеціальності 014 Середня освіта (математика) – Краматорськ : ДДМА, 2021. – 70 с.

Web-ресурси

1. Moodle. <http://www.dgma.donetsk.ua/golovna.html>
2. Khan Academy <https://uk.khanacademy.org>
3. CoCalc <https://cocalc.com>

ДОДАТОК А. Зразки завдань модульних контролів

Донбаська державна машинобудівна академія

Семестр 2 Навчальна дисципліна «Функціональний аналіз»

Спеціальність 014

М1. ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ

Білет № 1

Завдання 1. Довести, що функції $f_2 = 5x$, $f_3 = -x$ є лінійно залежними.

Завдання 2. Обчислити норму елемента

$$x(t) = 2t - t^2 + 1$$

у просторі $C_{[-1,2]}$.

Завдання 3. Обчислити скалярний добуток елементів

$$f(t) = t \text{ і } g(t) = \frac{1}{t^2}$$

у просторі $C_{2[1,3]}$.

Завдання 4. Довести, що функція на множині R

$$\rho(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$$

є метрикою.

Завідувачка кафедри

Власенко К.В.

Екзаменатор

Ровенська О.Г.

Критерії оцінювання. Завдання 1-4 оцінюються у 25 балів кожне. Максимальна оцінка за завдання може бути виставлена при виконанні таких умов: повний аналіз умови, постановка математичної моделі, правильні обчислення, повнота висновків, аналіз результату.

М2. ЛІНІЙНІ ФУНКЦІОНАЛИ І ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

Білет № 1

Завдання 1. Обчислити норму функціонала

$$f(x) = x(1) - 2x(2),$$

заданого у просторі $C_{[0,2]}$.

Завдання 2. Знайти міру зазначених множин на прямій

1. $[0; 2]$.

2. $[0; 2)$.

Завдання 3. Довести, що функція $y = f(x)$, $x \in R$ вимірна за Лебегом на R , якщо

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{x^4 + n^4}.$$

Завдання 4. Яка із вказаних функцій, відображаючих $[0,1] \rightarrow [0,3]$ є сюр'єкцією, ін'єкцією, бієкцією

а) $f(x) = 3^x$, б) $f(x) = 12(x - 1/2)^2$, в) $f(x) = 3x$.

Завідувачка кафедри

Власенко К.В.

Екзаменатор

Ровенська О.Г.

Критерії оцінювання. Завдання 1-4 оцінюються у 25 балів кожне. Максимальна оцінка за завдання може бути виставлена при виконанні таких умов: повний аналіз умови, постановка математичної моделі, правильні обчислення, повнота висновків, аналіз результату.

М1. ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ

Завдання 1. Довести, що функції $f_2 = 5x$, $f_3 = -x$ є лінійно залежними.

Розв'язання. Бачимо, лінійна комбінація цих елементів, де константи наприклад,

$$\beta = 1, \gamma = 10,$$

дорівнює нулю. Отже, функції лінійно залежні.

Завдання 2. Обчислити норму елемента

$$x(t) = 2t - t^2 + 1$$

у просторі $C_{[-1;2]}$.

Розв'язання.

$$\|x\| = \max_{-1 \leq t \leq 2} |x(t)| = \max_{-1 \leq t \leq 2} |2t - t^2 + 1| = 2.$$

Завдання 3. Обчислити скалярний добуток елементів

$$f(t) = t \text{ і } g(t) = \frac{1}{t^2}$$

у просторі $C_{2[1,3]}$.

Розв'язання.

$$(f, g) = \int_1^3 t \cdot \frac{1}{t^2} dt = \int_1^3 \frac{1}{t} dt = \ln|t| \Big|_1^3 = \ln|3| - \ln|1| = \ln 3.$$

Завдання 4. Довести, що функція на множині R

$$\rho(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$$

є метрикою.

Розв'язання.

Перевіримо виконання аксіом метрики.

1. $x = y, \rho(x, y) = \min\{1, |x - x|\} = 0.$

2. $\rho(x, y) = \min\{1, |x - y|\} = \min\{1, |y - x|\} = \rho(y, x),$

3. $\rho(x, z) = \min\{1, |x - z|\} = \min\{1, |x - y + y - z|\} \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$

Всі аксіоми виконуються, функція є метрикою.

М2. ЛІНІЙНІ ФУНКЦІОНАЛИ І ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

Завдання 1. Обчислити норму функціонала

$$f(x) = x(1) - 2x(2),$$

заданого у просторі $C_{[0,2]}$.

Розв'язання.

$$|x(1)| + 2|x(2)| \leq 3 \max_{0 \leq x \leq 2} |x| = 3\|x\|.$$

Припустимо, що $\|f\| = 3$.

$$\|f\| \leq \frac{|f(x)|}{\|x\|_{C_{[0,2]}}} = \frac{|x(1)-2x(2)|}{\max_{0 \leq t \leq 2} |x(t)|},$$
$$\max_{0 \leq t \leq 2} |x(t)| = 1.$$

Оберемо неперервну функцію $x(t)$, так щоб, $\max_{0 \leq x \leq 2} |x(t)| = 1$. Отже $\|f\| = 3$ – норма функціонала.

Завдання 2. Знайти міру зазначених множин на прямій

1. $[0; 2]$.

2. $[0; 2)$.

Розв'язання.

1. $m[0; 2] = 2$.

2. $m(0; 2] = 2$.

Завдання 3. Довести, що функція $y = f(x)$, $x \in R$ вимірна за Лебегом на R , якщо

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^4 + n^4}.$$

Розв'язання. Для вимірності функції $f(x)$ необхідно і достатньо, щоб її можна було подати у вигляді границі рівномірно збіжної послідовності простих, вимірних функцій.

Члени розглянутого ряду неперервні функції на R , тому вимірні за Лебегом. Оскільки

$$f(x) \sim \frac{x}{n^4},$$

то заданий ряд є еквівалентним ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^4},$$

який збігається. Отже, тому сума ряду є вимірною за Лебегом.

Завдання 4. Яка із вказаних функцій, відображаючих $[0,1] \rightarrow [0,3]$ є сюр'єкцію, ін'єкцію, бієкцію

а) $f(x) = 3^x$, б) $f(x) = 12(x - 1/2)^2$, в) $f(x) = 3x$.

Розв'язання.

а) $y \in [0,1]$ -розв'язку немає, відображення не сюр'єкція, ін'єкція

б) $y_1 = y_2$ наприклад, при $x_1 = 1, x_1 = -1$, не сюр'єкція, не ін'єкція

в) Задана функція ін'єкція і сюр'єкція, отже бієкція